

浮世絵における顔表現の科学

1 はじめに

絵画はたんに美術品として鑑賞の対象になるだけではなく、人文科学資料として考古学、歴史学、民族学、民俗学、芸術学、宗教学などの学問領域において、研究上重要な意味合いを持つものである。絵画の研究手法としては、X線や赤外線撮影による透視などの科学的方法も用いられているものの、その分析となると、描かれている図像の分類や絵画間の比較段階において、研究者の直感や感性的判断に頼らざるをえない場合が多い。絵画分析になんらかの科学的方法を適用することは、人文科学研究にとってあたらしい試みであるのみならず、理工学研究の題材としても興味深いテーマである。われわれは、理工学的方法を駆使したあたらしい絵画研究の方向性を模索すべく研究を進めてきた。われわれの研究目的は、情報

学、美術史学、統計学、人類学の研究者が協力して、絵画研究に関する具体的な問題を共同で研究することによって、計量的な方法による絵画分析手法の開発を試みることにある。

われわれが主たる研究対象としてきたものは、江戸時代の浮世絵に描かれた女性顔貌表現である。浮世絵の女性顔貌に対象を限定した理由は、一般的な絵画と比較してその表現がパターン化しており、アプローチしやすいと考えたからである。

江戸時代の浮世絵のなかに、市井や遊郭に生きた女性を描いた美人画と呼ばれる作品ジャンルがある。そこでの顔貌表現には、作者や時代に「典型的な型」があるといわれている。ところが、「典型的な型」とは何かについては、「華奢な姿態」「中性的な容貌」「豊かな顔だち」といった、直感的・定性的な言語表現に頼らざるをえないという、美術研究の現状がある。顔Aと顔Bが似ているか否か

山田 奨治
早川 多
村上 征勝
埴原 和郎

についての判断は、直感的にある程度可能ではあるが、「どのくらい似ているか」という問いに対しては、従来手法ではまったく回答を用意できない。浮世絵美人画にあらわれるという、時代や作者に典型的な特徴を的確にとらえることができたならば、作風の近さを空間配置で表現することができる。また浮世絵の顔表現から作者や流派・制作年代を、ある程度機械的に推定できる可能性もある^①。

本論文では、浮世絵女性顔貌表現の計量によって作者を判定できる可能性について、①顔部品形状分類による方法、②顔部品計測値による方法、③顔部品角度による方法、の三方面から検討する。さらに、計量情報を用いた作者識別についても述べる。

2 顔部品形状分類法による分析

方法

最初に、顔部品を抽出してその分類データを作成し、作者固有の要素と作者間の類似性を考察するための計量的方法について検討する。

実験対象として、浮世絵作者十一名（菱川師宣、西川祐信、鈴木春信、鳥居清長、喜多川歌麿、葛飾北斎、歌川豊国、歌川国貞、溪斎英泉、歌川国芳、歌川広重）の代表作から、女性斜め横顔像を数例ずつ選択し、浮世絵顔貌表現分類データとして作成した。それぞれの作者の生没年と活躍期を表1に示した。また師宣、祐信、春信を浮世絵

史の前期、清長、歌麿、北斎、豊国を中期、国貞、英泉、国芳、広重を後期と便宜的に分類した。研究に用いた総顔数は、五十八例（属性値に欠損があるのは八例、八属性値）である。

最初に、実験対象顔から顔輪郭線、眉、目、鼻、口、耳の顔部品を取り出して手作業で分類した。分類に基づき、実験対象顔部品の分類表を作成した。顔部品は、顔輪郭線六種類、眉五種類、目五種類、鼻五種類、口三種類、耳八種類に分類された（図1）。分類は形状のみからおこない、大きさは考慮しないことにした。

顔輪郭線については、ややえらのはったI型、全体に丸みをおびたII型、ややのっぺりとしたIII型、目のところで一度線が内に入り込み全体に豊満なIV型、縦に長いV型、III型に似ているがそれよりもあごが尖ったVI型に分類した。

眉については、細い線で中央部が上がったI型、太い線でやや直線的に上がるII型、I型に似ているが太いIII型、三日月形をしているIV型、細い線で直線的に上がるV型に分類した。

目については、左右の目が一文字に切れ長のI型、左右が一文字であるがややどぐり目のII型、左右の目が八の字に開き目頭が狭く目尻がひろいIII型、III型に似ているが線が丸みをおびたIV型、左右の目がバランス悪くつり上がったV型に分類した。

鼻については、単調な鉤形のI型、やや団子鼻のII型、鼻筋のとおったIII型、線全体が微妙な丸みをおびたIV型、鼻先の尖ったV型

表1 浮世絵作者の生没年と活躍期

作者名	生没年	活躍期
菱川 師宣	? ~1694	1670~1694
西川 祐信	1671~1750	1692~1750
鈴木 春信	1725~1770	1760~1770
鳥居 清長	1752~1815	1767~1815
喜多川 歌麿	1753~1806	1775~1806
葛飾 北斎	1760~1849	1779~1849
歌川 豊国	1769~1825	1788~1825
歌川 国貞	1786~1864	1807~1864
溪斎 英泉	1791~1848	1810~1848
歌川 国芳	1797~1861	1812~1861
歌川 広重	1797~1858	1818~1858

に分類した。

口については、上唇が突きでたⅠ型、上下の唇の大きさがそろったⅡ型、下唇が突きでたⅢ型に分類した。

耳については、おなじ作者のなかでも細かくみれば千差万別で、もっともバリエーションが多く、各タイプの言語化は困難である。

ここにあげた分類は、たいへんおおざっぱなものである。Ⅰ型ⅡⅣ型までは、耳朶の小さなものである。Ⅴ型ⅢⅧ型までは、耳朶の大きな、いわゆる福耳である。それぞれ耳の構造の描き方によってさらに細かく分類をおこなった。

ここで問題となるのは、分類データに対する類似度の与え方である。浮世絵顔貌の場合は、着物の袖で口を隠した表現や眉を剃った

顔など、顔部品の形状が不明な例が頻出する。そこで属性値が欠損している場合に、その意味を正確に反映させた類似度計算法が必要になる。また作者間で顔貌表現の類似性がひくい場合には、求め方によっては顔と顔の類似度がゼロに近い組み合わせが多くなり、類似度を空間に配置する

際の計算が困難になる場合がある。さらに、分類区分の仕方自体が人為による場合は、区分の荒さ・細かさを反映できる類似度である必要がある。そこで「属性値がもつ重要性」という概念によって顔の類似度を数量化した。この方法によればこれらの問題がおこりにくく、かつ計算上の取り扱いが容易になる。手法の詳細は、文献²⁾を参照されたい。

分析結果と考察

顔部品表現に作者特有の要素があるか否かをみるために、顔部品

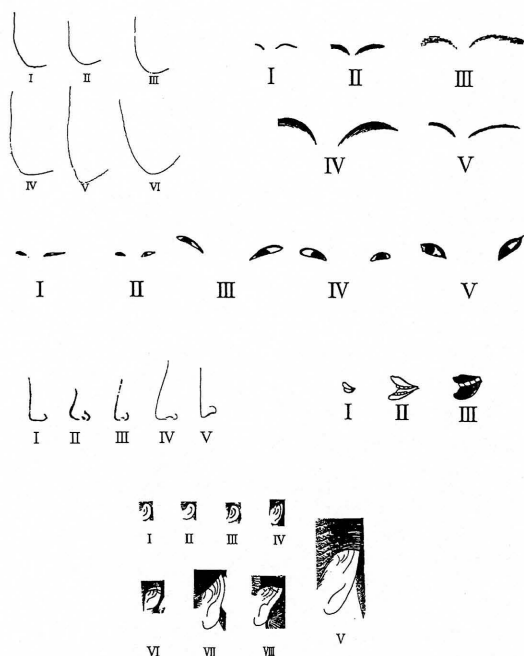


図1 顔部品形状分類 (山田原図)

表3 作者と顔部品形状の独立性検定

顔部品	カイ自乗値	自由度	p値
顔輪郭線	229.78	50	<0.01
眉	105.04	40	<0.01
目	170.67	40	<0.01
鼻	176.24	40	<0.01
口	105.64	20	<0.01
耳	282.82	70	<0.01

表4 数量化IV類表

	固有値	寄与率	累積寄与率
第1変量	52.54	0.49	0.49
第2変量	45.94	0.43	0.93
第3変量	7.89	0.07	1.00

と作者のクロス集計結果に対して独立性検定を実施した。表2にクロス集計結果を、表3に独立性検定の結果をそれぞれ示した。p値は、すべての顔部品について○・○一以下であり、顔部品と作者の独立性仮説は棄却さ

れた。したがって、すべての顔部品について、表現と作者は密接に関係するといえることがわかる。「属性値が持つ重要性」概念によって顔の類似度を数量化したデータについて、林の数量化IV類³⁾により顔類似度の空間的布置の図化を試みた。数量化IV類分析により求められた固有値と寄与率、累積寄与率を表4に、個体についての第2変量までの空間的布置を図2に示した。

図2より、十一名の浮世絵作者は大きく四グループに分類可能であることがわかった。グループIには師宣・祐信・春信の浮世絵前

表2 作者と顔部品形状のクロス集計表

(a)顔輪郭線

	I	II	III	IV	V	VI
師宣	2	0	0	0	0	0
祐信	0	9	0	0	0	0
春信	0	0	7	0	0	0
清長	0	3	0	5	0	0
歌麿	0	0	0	8	0	0
北斎	0	0	0	0	3	4
豊国	0	1	0	3	0	0
国貞	0	0	0	0	0	3
英泉	0	0	0	0	0	4
国芳	0	0	0	0	0	3
広重	0	0	0	0	0	3

(b)眉

	I	II	III	IV	V
師宣	2	0	0	0	0
祐信	8	0	0	0	0
春信	7	0	0	0	0
清長	0	1	0	4	2
歌麿	0	2	1	3	2
北斎	1	0	5	0	0
豊国	0	1	0	1	2
国貞	0	0	1	0	2
英泉	0	0	2	0	2
国芳	0	0	0	0	3
広重	0	0	0	0	3

(c)目

	I	II	III	IV	V
師宣	2	0	0	0	0
祐信	2	7	0	0	0
春信	7	0	0	0	0
清長	0	0	8	0	0
歌麿	0	0	8	0	0
北斎	2	0	5	0	0
豊国	0	0	2	2	0
国貞	0	0	0	0	3
英泉	0	0	0	0	4
国芳	0	0	0	0	3
広重	0	0	0	0	3

(d)鼻

	I	II	III	IV	V
師宣	2	0	0	0	0
祐信	0	9	0	0	0
春信	0	0	5	2	0
清長	0	0	0	8	0
歌麿	0	0	0	7	1
北斎	2	0	1	4	0
豊国	0	0	0	4	0
国貞	0	0	0	0	3
英泉	0	0	0	0	4
国芳	0	0	0	0	3
広重	0	0	0	0	3

(e)口

	I	II	III
師宣	2	0	0
祐信	9	0	0
春信	7	0	0
清長	0	8	0
歌麿	0	4	3
北斎	0	0	3
豊国	0	4	0
国貞	0	0	3
英泉	0	0	4
国芳	0	0	3
広重	0	0	3

(f)耳

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
師宣	0	0	2	0	0	0	0	0
祐信	6	3	0	0	0	0	0	0
春信	1	0	5	0	0	0	0	0
清長	0	0	0	8	0	0	0	0
歌麿	0	0	0	0	8	0	0	0
北斎	0	0	0	0	5	0	0	0
豊国	0	0	0	0	0	3	0	0
国貞	0	0	0	0	0	0	2	1
英泉	0	0	0	0	0	0	1	3
国芳	0	0	0	0	0	0	0	3
広重	0	0	0	0	1	1	0	0

表 5 対象作品一覧

顔ID	作者名	作品名	制作年(西暦)
MRN1	菱川師宣	絶唱のあと	1673-81
MRN3a	菱川師宣	江戸物参鉢・花下の三曲	ca.1678-84
MRN3c	菱川師宣	江戸物三鉢・花下の三曲	ca.1678-84
MRN4b	菱川師宣	浮世百人女	1681
SKN1a	西川祐信	百人女郎品定 (上之巻)	1723
SKN2a	西川祐信	百人女郎品定 (上之巻)	1723
SKN2b	西川祐信	百人女郎品定 (上之巻)	1723
SKN3a	西川祐信	百人女郎品定 (下之巻)	1723
SKN3b	西川祐信	百人女郎品定 (下之巻)	1723
SKN4	西川祐信	百人女郎品定 (下之巻)	1723
SKN5a	西川祐信	百人女郎品定 (下之巻)	1723
SKN5b	西川祐信	百人女郎品定 (下之巻)	1723
HRN1a	鈴木春信	坐鋪八景・時計の晩鐘	ca.1765-66
HRN1b	鈴木春信	坐鋪八景・時計の晩鐘	ca.1765-66
HRN2a	鈴木春信	雨乞い小町	1766
HRN2b	鈴木春信	雨乞い小町	1766
HRN3	鈴木春信	藤原敏行朝臣 (秋風)	不明
HRN4	鈴木春信	源重之	1767-68
KYN1a	鳥居清長	大川端夕涼み (左)	ca.1785
KYN1b	鳥居清長	大川端夕涼み (左)	ca.1785
KYN2a	鳥居清長	雛形若菜の初模様・丁子屋内若草	ca.1783
KYN2b	鳥居清長	雛形若菜の初模様・丁子屋内若草	ca.1783
KYN2c	鳥居清長	雛形若菜の初模様・丁子屋内若草	ca.1783
KYN3b	鳥居清長	大川端夕涼み (右)	ca.1785
KYN3c	鳥居清長	大川端夕涼み (右)	ca.1785
UTB1	喜多川歌麿 (前期)	南駅は印	ca.1796
UTB2	喜多川歌麿 (前期)	姿見七人化粧	ca.1792-93
UTB3a	喜多川歌麿 (前期)	高名三美人	ca.1789-1801
UTB3b	喜多川歌麿 (前期)	高名三美人	ca.1789-1802
UTB3c	喜多川歌麿 (前期)	高名三美人	ca.1789-1803
UTB4a	喜多川歌麿 (前期)	霞織娘雛形	ca.1793-94
UTB4b	喜多川歌麿 (前期)	霞織娘雛形	ca.1793-94
UTB5	喜多川歌麿 (前期)	婦人相学十鉢・浮気之相	ca.1793
UTA1	喜多川歌麿 (後期)	鮑とり (右)	1789-1801
UTA2	喜多川歌麿 (後期)	教訓親の目鑑、不作者	ca.1801-04
UTA3a	喜多川歌麿 (後期)	橋上橋下	1789-1801
UTA3c	喜多川歌麿 (後期)	橋上橋下	1789-1801
UTA4	喜多川歌麿 (後期)	錦織歌麿形新模様・文読み	ca.1801-04
HS1a	葛飾北斎	風流無くてななくせ・ほおずき	1798-1811
HKS1b	葛飾北斎	風流無くてななくせ・ほおずき	1798-1811
HKS2b	葛飾北斎	風流無くてななくせ・遠目鏡	1798-1811
HKS3	葛飾北斎	あづま与五郎の残雪	1801-1818
TYK1	歌川豊国	風流三幅対・高島おひさ	1789-1801
TYK2	歌川豊国	高しまひさ	1789-1801
TYK3a	歌川豊国	風流七小町略姿絵・かよひ小まち	1789-1801
TYK4	歌川豊国	美人七小町・丁子屋内錦戸	ca.1794-1796
TYK5	歌川豊国	風流三幅対・難波屋おきた	ca.1794
KNS1	歌川国貞	今風化粧鏡・合せ鏡	ca.1823
KNS2	歌川国貞	当世美人合・身じまい芸者	ca.1829-30
KNS3	歌川国貞	詠織当世島・金花糖	ca.1845-46
KNS4	歌川国貞	今風化粧鏡・笄さし	1809
KNS5	歌川国貞	五節句の内・新吉原大門	1855
KNS6	歌川国貞	青楼美人合・扇屋内花扇	ca.1830-32
KNS7	歌川国貞	当流女諸礼儀方・むかひに行やう	ca.1833-35
EIS1a	溪斎英泉	浮世四十八手・身仕舞の手	1818
EIS1b	溪斎英泉	浮世四十八手・身仕舞の手	1818
EIS2	溪斎英泉	浮世風俗美女鏡・万点水蜆	ca.1822
EIS3	溪斎英泉	今世美女鏡・水茶屋	ca.1825
EIS4	溪斎英泉	浮世風俗美女鏡・蛾眉再画当時縁	ca.1822
EIS5	溪斎英泉	蛇の目傘の女	ca.1825-30
KNY1	歌川国芳	夕霞 (団扇絵)	1836
KNY2	歌川国芳	花魁	ca.1831
KNY3	歌川国芳	乳のみ子	1844-47
KNY4	歌川国芳	山海愛渡図会・尾張焼物、たんと釣たい	1852
KNY5	歌川国芳	大津絵八景・神なりのよるの雨	ca.1850-52
KNY6	歌川国芳	大津絵八景・げほふのせいらん	ca.1850-52
HRS1	歌川広重	外と内姿八景・ろうかの暮雪	ca.1821-22
HRS2	歌川広重	今様弁天尽し・本所一ツ目	ca.1821-22
HRS3	歌川広重	東都本郷月之光景 (三枚続左)	不明
HRS4a	歌川広重	駿河美保の松原・清見かせき	1852
HRS5a	歌川広重	隅田堤闇夜の桜	ca.1847-52
HRS5c	歌川広重	隅田堤闇夜の桜	ca.1847-52

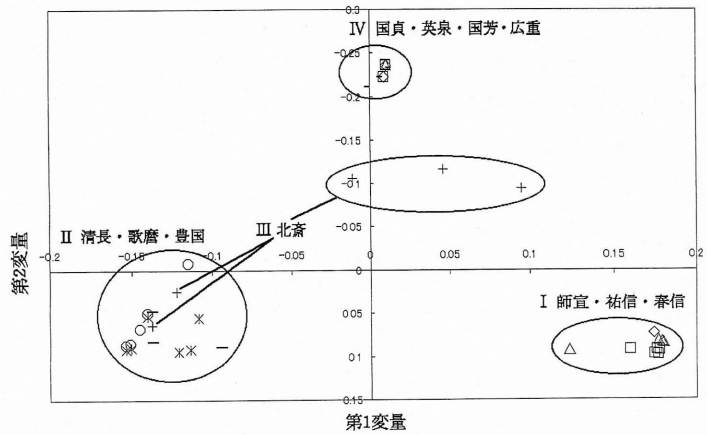
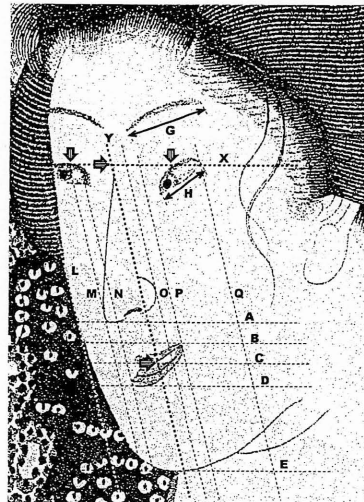


図2 数量化IV類分析結果 (山田原図)



基準軸
X 左右の眼裂上縁の中点(●)を結ぶ
Y Xと鼻後縁との交点、および口の中心点(●)を結ぶ

計測
Y軸に平行に計測
X-E 顔高
X-C 上顔高
X-A 鼻高
B-D 口唇高
X軸に平行に計測
L-Q 顔幅
M-O 鼻深
N-P 口唇幅
独立に計測
G 眉幅
H 眼裂幅

実際に使用した計測値はすべて顔高に対する百分率として標準化した。

図3 計測基準線と副基準線 (埴原原図)

期の作者群、グループIIには清長・歌麿・豊国の浮世絵中期の作者群、グループIIIには北斎の一部、グループIVには国貞・英泉・国芳・広重の浮世絵後期の作者群が布置される。これらのグループは浮世絵史的にみて違和感はなく、作者に典型的な顔部品の分類データから、おおまかな作風が識別可能であることがわかった。

この結果は興味深い。というのは、美術史的な顔貌表現の識別で

バラに存在していたわけではなく、図2が示すところは、あきらかにグループ化できる程度にある時代性をおびていたことを明示しているからである。これは美術史のみならず、芸術表現における「個人の表現」と「時代の表現」という大きな問題を考えるうえで、示唆に富むものと考えられる。

また浮世絵の顔貌表現の時代変化について、つぎのような考察も

は、各作者の表現にたしかな差異のあることは認識できるが、それぞれのあいだにどれほどの類似度または相違度があるかは、なかなか想定できないものである。もちろん後期の作者たちの顔貌表現がたがいによく似ているということは通説になっているが、それ以外の作者たちの表現の差異がどのような相関関係にあるかは想定しにくい。それが図2をみると、前期の作者・中期の作者・後期の作者がきれいにグループ化されて空間表示されている。

これはある意味で驚くべき結果といえよう。何故ならば、ライバルとの違いを意識し新奇を競うことを使命とした浮世絵師たちの表現が、決したがいに無関係にバラ

可能なものではなからうか。浮世絵前期の第Ⅰグループに対してつぎの中期の第Ⅱグループの表現が、第Ⅰ変量を基準にすると対称的な位置にあるということは、中期の作者たちが前期の時代表現に対抗して、第Ⅰ変量が暗示する表現に関して正反対の表現を試みたということを示してはいないか。

もし右の仮定が成立するならば、北斎は第Ⅱグループに属しながら、第三の表現を目指して、第Ⅰグループと第Ⅱグループの表現に対して第Ⅱ変量が暗示する表現において対照的な表現を試みたと考えられ、それを受けて強調してみせたのが第Ⅳグループであったと考えられるのである。こうした考察が可能であれば美術史的にたいへん興味深いことであるが、それが意味あるものとなるにはここでいう統計上の変量と具体的な表現とのあいだに、ある関連が想定できる場合に限られよう。

本章の方法にはいくつかの限界がある。第一にここで用いた顔部品形状分類は絶対的なものではない。他の作品を対象に含めた場合、まったく異なる形状の顔部品が出現するだろう。また、どのタイプの顔部品にあたるかの判断に、分析者の個人差があらわれる可能性がたかい。とくに目、眉、耳は判断に迷うケースが比較的好い。それらに対して、顔輪郭線、鼻、口については比較的安定して分類できると思われる。したがって、以後の分析では、後者の三要素のみを顔部品形状分類データとして使用することにする。

3 顔部品計測値による分析

方法

つぎに、浮世絵作者の特徴、および作者間の類似性・非類似性を客観的に分析するため、いくつかの顔面計測法を定義して数量化を試みた。実験に用いた顔貌は、第2章のデータよりも増やして七十二例にし、さらに歌麿の作品をその表現様式から前期と後期に分割した。顔貌を採取した作品リストを表5に示した。

計測項目は人類学で使われる生体の顔面計測法に近づけることを意図し、まず画像上で定義しやすい基線を設定した。ついでそれらのうえで計測点を決めて副基線を定め、それらの間隔を計測するという方法を採用した。

・基線の設定

設定が容易で、計測者間の個人差が生じにくい二種の基線を定義した(図3)。

- 1 横基線(X軸) — 左右の眼裂上縁の midpoint (図3の下向き矢印) を通る直線

- 2 縦基線(Y軸) — 横基線と鼻稜線の交点、および口唇の最大幅と最大高の中央点(図3の右向き矢印) を結ぶ直線

またこれらの基線を平行移動して得られる数本の副基線を定義した。

横基線を平行移動して得られる副基線

A 鼻の下縁最下端に接する線

口唇幅		眉 幅		眼裂幅		鼻 深	
M	SD	M	SD	M	SD	M	SD
20.38	2.4102	18.30	4.9444	29.43	3.6077	18.20	0.8206
16.41	1.8193	32.99	1.1205	24.26	2.3366	24.38	2.9731
14.82	1.7646	35.30	4.1593	26.83	2.6296	18.78	1.6833
17.47	0.7675	36.93	1.9746	22.34	1.0753	21.67	1.2996
14.59	1.3314	32.41	4.0797	18.39	3.1930	19.05	1.1225
13.78	1.9305	27.78	1.1122	16.90	3.2519	19.02	1.3330
15.18	2.2709	31.80	1.6568	17.38	2.7390	16.34	1.1415
14.68	1.5840	29.88	3.3896	17.18	1.9602	18.73	2.0887
14.65	2.1473	27.27	1.3692	18.70	1.1063	18.43	1.0482
16.23	1.2134	27.59	2.1412	17.07	1.4396	17.79	1.6263
16.25	1.1777	27.43	2.4122	18.70	1.3638	17.83	0.7448
16.97	1.4638	26.27	1.8565	17.18	1.2465	18.30	0.8050

師 宣	祐 信	豊 国	歌麿・後	歌麿・前
0.0				
27.1223	0.0			
36.6733	26.7903	0.0		
44.1670	26.9233	5.3066	0.0	
44.7383	24.7332	5.0297	1.4516	0.0

- B 口唇上縁の最上端に接する線
- C 口の中央点を通る線
- D 口唇下縁の最下端に接する線
- E 下顎下縁の最下端に接する線

縦基線を平行移動して得られる副基線（最遠点とは縦基線からの距離がもっとも遠い点を意味する）

- L 頬輪郭の最遠点に接する線
- M 鼻尖の最遠点に接する線
- N 口唇向こう側の最遠点に接する線
- O 鼻翼の最遠点に接する線
- P 口唇手前の最遠点に接する線
- Q 手前の眼裂の最遠点に接する線

・計測項目の定義

- I 基線間の距離（縦・横基線と平行に計測する）
 - X | E 顔 高
 - X | C 上顔高
 - X | A 鼻 高
 - B | D 口唇高
 - L | Q 顔 幅

表 6 作者別平均値 (M) *と標準偏差 (SD)

作 者	作品数 N	鼻 高		上顔高		顔 幅		口唇高	
		M	SD	M	SD	M	SD	M	SD
師 宣	4	40.05	1.6623	59.48	1.4408	73.05	4.6608	13.13	1.8446
祐 信	8	43.44	1.1211	62.54	1.5042	72.34	4.5644	14.50	1.6587
春 信	6	46.97	2.4064	65.12	2.4645	74.13	5.6465	8.98	0.8976
清 長	7	46.73	1.4020	64.31	1.6436	63.74	3.7775	12.40	1.2557
歌麿 (前期)	8	49.03	1.5220	66.05	1.1136	57.44	5.3125	9.76	1.0042
歌麿 (後期)	5	49.44	1.1610	65.46	1.8716	55.26	1.6273	10.28	1.3755
豊 国	5	44.38	1.6709	64.94	0.5941	53.22	3.3722	11.76	1.1929
北 斎	4	49.18	3.9844	69.00	4.4632	55.28	7.7025	13.30	1.5937
広 重	6	53.32	3.0603	65.85	1.2276	52.85	1.8480	12.37	0.7891
国 貞	7	53.43	2.8529	67.37	2.2845	52.53	3.0297	13.11	1.9769
英 泉	6	53.68	1.1771	67.33	1.3201	56.47	1.5175	13.08	0.6940
国 芳	6	50.53	2.2914	66.13	2.4541	51.82	1.1444	12.28	1.1374

*平均値は顔高によって標準化した値によって計算

表 7 Mahalanobisの汎距離行列

	英 泉	北 斎	春 信	広 重	国 貞	国 芳	清 長
英 泉	0.0						
北 斎	2.9548	0.0					
春 信	20.8278	20.8359	0.0				
広 重	1.5775	3.4274	19.0127	0.0			
国 貞	0.3569	2.7323	24.3098	1.5710	0.0		
国 芳	1.6815	4.1433	21.2867	2.2245	1.2551	0.0	
清 長	13.4135	13.1979	11.3240	13.8232	15.0010	11.7799	0.0
師 宣	39.2278	47.8258	36.6524	41.8513	43.1269	34.3690	30.3010
祐 信	26.6222	24.6197	21.9944	26.1573	29.4303	25.4403	6.6761
豊 国	8.2851	6.5166	15.8997	6.7226	7.7726	5.4460	12.6534
歌麿 (後期)	6.9854	5.9960	13.7855	3.1190	6.8564	5.1899	14.2768
歌麿 (前期)	7.8979	6.6210	8.5589	5.0807	8.2024	6.3151	9.8521

・計測値の定義

各作品の大きさが異なるため、ここで定義した計測値をそのまま使うことはできない。そこで統計分析にあたっては、顔高に対する各計測値の百分率(示数)を原データとして計算をおこなった。本章で顔部品計測値あるいはたんに計測値

という場合は、この示数のことを指す。なおこの方法で定義された計測項目は、それぞれ同名の人類学的計測項目にもつとも近い数値を与えるとの観点から選ばれたものである。

今回取り上げた作品ではいずれも顔を斜め横に向けており、その角度は正面から約三〇度右向きまたは左向きでほぼ一定している。画集からの拡大コピーのうえで直接計測することとした。

M—O 鼻 深 (矢状方向に計測した鼻の高さ)
N—P 口唇幅

II 基線によらない計測

G 眉 幅 手前の眉の最大幅
H 眼裂幅 手前の目の最大幅

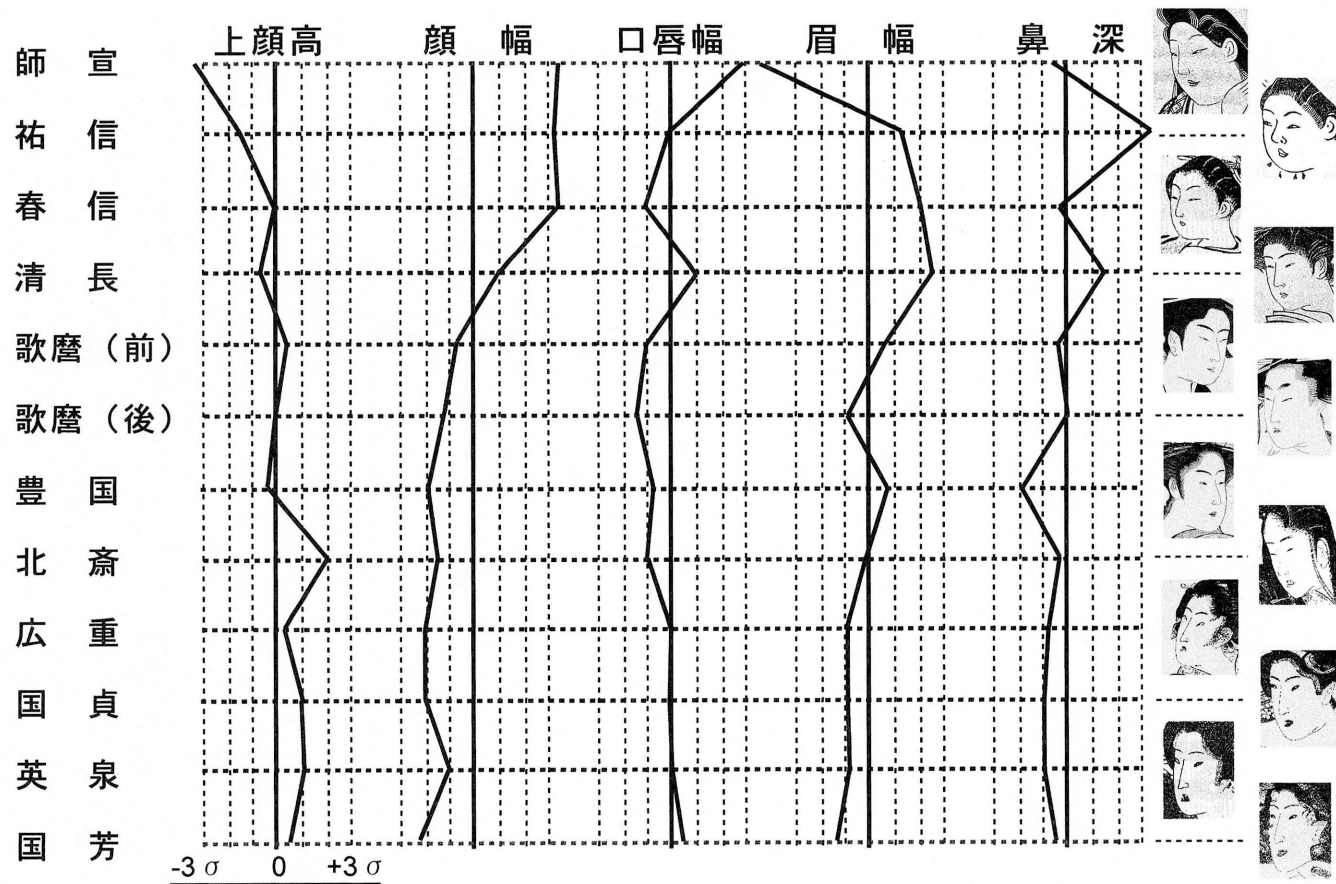


図4 主要計測値の偏差折線図 (埴原原図)

分析結果と考察

・各作者の全平均値に対する偏差

まず、各作者の概略的傾向をみるため、全作者の平均値（全平均）に対する個々の作者の平均値（個体平均）の標準偏差を計算し、それを偏差折線として表示した。図4には代表的な顔部品計測値の偏差（ σ ）を示したが、各計測値の中心線（太線）は全平均値であり、その左右にある点線はそれぞれ σ 、 2σ 、 3σ の位置を示している。また全平均値より左はマイナス側、右はプラス側である。

一例として師宣をみると、上顔高はマイナス側に 3σ 以上偏っているが、対照的に顔幅はプラス側におなじく 3σ 以上振れている。この結果は、全平均値に対して上顔高がきわめて低く、逆に顔幅が格段に広いことを示している。さらに口唇幅は広く、眉幅は狭いが、鼻深は全平均値に近いことがわかる。

以下同様にみていくと、他の作者と大きく異なるのは師宣のほか祐信と春信である。清長もややはっきりした特徴を示すが、その他の作者は全平均値に比較的近い値を示している。各計測値ごとにみると、偏差の振幅がもっとも大きいのは上顔高と眉幅で、それぞれ 5σ 以上、 6σ 以上の幅を示している。

以上を総合的に判断すると、歌麿から国芳に至る作者はたがいによく似ているのに対して、師宣、祐信、春信は個性的であり、清長は中間的といえそうである。しかし北斎はやや異質であり、上顔高

が高く顔幅が狭いため、顔全体が異常に長くなっている。

この結果は、浮世絵史のおおまかな流れからみても妥当なものである。師宣は浮世絵の祖といわれ、江戸前期十七世紀後半に江戸で活躍した絵師であるのに対して、祐信は上方浮世絵の祖といわれ、十七世紀末期から十八世紀前半にかけて京都で活躍した絵師である。また春信は祐信の影響を受けながら、十八世紀中期の江戸でそのあたらしい顔貌表現によって一世を風靡し、浮世絵の中興をもたらした絵師である。その活躍した時代と地域をおおいに異にする三者が、それぞれ三者三様に個性的な顔貌表現をしていたとしても何ら不思議はない。ここでこの分析結果と顔部品形状分類データの分析結果（図2）とを考え合わせるならば、興味深い考察に導かれる。すなわち、師宣・祐信・春信は三者三様に個性的な顔貌表現をおこなっているが、それでもひとつの時代的表現としてグループ化できるということである。

つぎに本章の分析で中間的とされる清長は、春信の強い影響下で浮世絵師となり、春信の急死後に独自の顔貌表現を作り出した絵師である。そして清長に対抗するように登場してきたのが若い歌麿であり、その後江戸後期を華やかに彩る浮世絵師たちが続々と出現してくるのである。歌麿以後に登場する絵師たちの顔貌表現が、北斎を別とすれば、その多彩な顔ぶれほどに差異がなく、たがいに似ているという結果は興味深いことである。というのも、浮世絵師に課

せられた使命のひとつが常に新味な表現によって世評を勝ち取ることであったことを考えると、この結果は江戸後期の浮世絵師たちもはや顔貌表現の内に新味を競うことにあまり重きを置かなくなったことを意味し、別の要素の内に新味を競う場を見出すようになったものと推察されるからである。浮世絵史を顧みると、それはおそらく浮世絵の絵作りににおける「趣向」の新奇さということであつたろうが、それは本論文の対象とは別の問題になる。

・各作者間の統計学的距離

以下の統計学的分析では、原則として各作者における計測値の平均値を用いる(表6)。まず作者間の類似性・非類似性をみるため、マハラノビス汎距離^⑦(Mahalanobis' generalized distance)を計算した。表7はすべての作者ペアの距離を示す距離行列で、当然のことに対角要素(同作者間の距離がゼロ)に対して対称であるため、右上半部は省略してある。

しかしこれでは作者間の関係が直感的にわかりにくいいため、この距離行列に基づいてクラスター分析^⑧(群平均法)をおこない、その結果を樹状図であらわしたのが図5である。

一般に樹状図では距離の近いもの同士が短い枝(横線)で結ばれ、距離が遠くなるにつれて枝が長くなる。したがって図5では国貞と英泉がもっとも近いのに対して、師宣は他の作者ともっとも遠いこ

とがわかる。

図5を全体としてみると、ここで分析の対象とした十二人の作者(歌麿のみは前期と後期に区別してある)はまず四つのクラスター(群)に分かれるが、なかでも師宣は特異である。また祐信、春信、清長はたがいに似ているものの、他の作者との距離は遠い。すぐ気づくように、これらの四作者は偏差折線図(図4)において、全平均からの偏差が大きい作者に一致する。

つぎに、これらとはかなり離れている作者群のなかに歌麿・豊国クラスターと他の五人のクラスターがあるが、歌麿の前期と後期とがかなり近くなっているのは当然とも思われる。

最後の五人のクラスターでは北斎がかなり特異的ではあるものの、顔全体のプロポジションからみると、やや極端な面長のグループに属しているとみることができる。

この図5をみると、その作者のならばがおおよそ時代順どおりにならんでいることがわかる。クラスター分析に基づく樹状図のならばは決して任意なものではなく、統計的な類似度の遠近によって決まるものであるから、本分析法が浮世絵の顔貌表現の時代変遷の研究に有効であることがわかる。さらに図4の各作者の全平均値に対する偏差折線図とくらべて、類似度によるグループ分類がより明確かつ詳細になる。

また本分析では特に師宣と北斎の特異性が目立つ。北斎の特異性

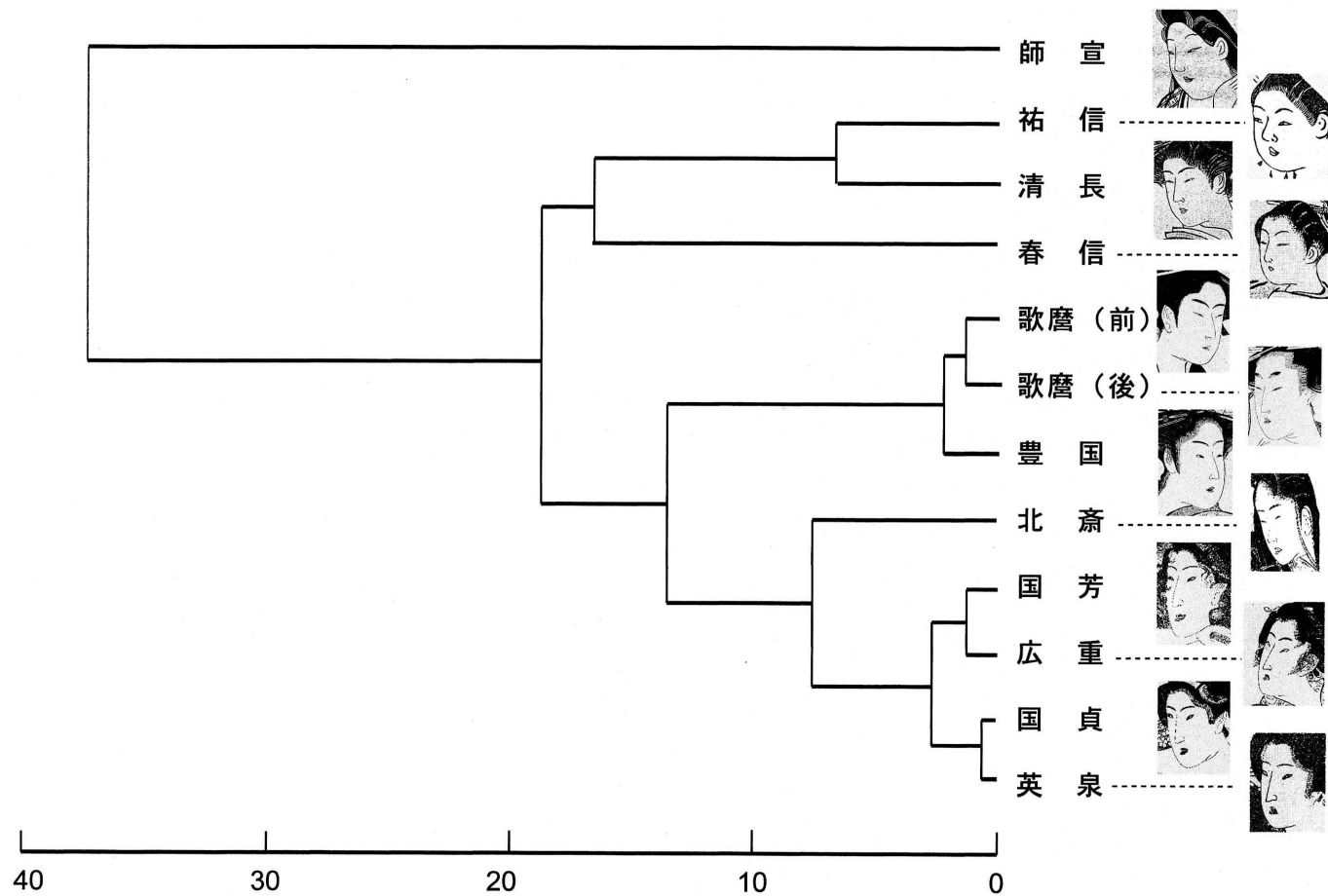


図5 Mahalanobisの距離に基づく樹状図 (埴原原図)

歌麿 UTB4a (前) / UTA3a (後)



D-SQ = 0.6440

国貞 KNS2 / 英泉 EIS5



D-SQ = 0.6510

国貞 KNS4 / 祐信 SKN2a



D-SQ = 69.3597

図6 最短距離と最遠距離を示す作品の比較
(英泉の図は左右逆転してある 埴原原因)

については第2章の分析とも通じるが、師宣が孤立して分類されている点が第2章の分析とは大きく異なっている。この点に関しては本分析の方が美術史的見方に合致

している。第2章の顔部品形状分析法はおおまかな時代表現の分類に適し、本章の顔部品計測値分析法は作者間の表現の相違度による分類に適しているように思われる。

さらに、今回分析の対象とした七十二点の作品のうち、異なる作者のあいだでもっとも距離の近いものと遠いものとを抽出すると図6が得られる。ただし歌麿は前期と後期を別々に取り扱った。

最短距離を示すのは歌麿の前期と後期の作品で、やはりよく似ていることは樹状図(図5)が示すとおりである。また別人のあいだでもっとも近いのは国貞と英泉の二作品で、その距離係数は歌麿の前・後期間の距離とほとんどおなじである。逆に距離がもっとも遠い例をあげると祐信と国貞の作品で、その距離は前二者の一〇〇倍以上に達する。

図7はY軸上の顔高を一致させ、最短距離にある作品(国貞と英泉)と最長距離にある作品(祐信と国貞)とを重ね合わせたものである。これによってそれぞれの類似点と相違点が一層明確に認識されるが、とくに祐信と国貞との対比では、顔の各部分の描き方はこちらん、顔の中心線(Y軸)からみた部分の配置がまったく異なり、画風の違いが一目瞭然である。

・主成分分析

距離分析では作者間の類似度・非類似度を数量的に把握することができるが、ではどこが似て、どこが違うのか、という点はわからない。そこで作者の特徴や作者間の類似度・非類似度を具体的に分析するため相関行列に基づく主成分分析^⑧をおこなった。

表8(a)は表6の平均値に基づき、この方法で抽出された主成分にかかわる計算結果で、これらから各主成分がどのような特徴を代表しているか、また分類に対する貢献度はどのくらいか、などの



図7 左—国貞 (KNS2) と英泉 (EIS5)、右—国貞 (KNS4) と祐信 (SKN2a) の重ね合わせ (いずれも顔高とY軸の向きを一致させてある 埴原原図)

点を読みとることができる。累積寄与率をみると第1および第2主成分の累積が約七三パーセントに達している。これは、全体の情報のうちほぼ四分の三がこれらふたつの主成分によって代表されるという意味であるから、とりあえずこのふたつの主成分値(表8(b))に基づいて二次元散布図を描いたのが図8である。

図8で横軸は第1主成分、縦軸は第2主成分の値で、それぞれの

作者は該当する主成分値に基づいてプロットしてある。また各主成分が何を意味しているかについては、表8(a)の固有ベクトルから読みとることができる。結論をいえば、第1主成分(横軸)は顔の高さと幅との関係をあらわす。そしてこの値が大きいほど(右側にいくほど)顔幅や眼裂幅が大きく、また丸顔になる。逆に値が小さくなるほど(左側にいくほど)上顔高や鼻高が大きく、面長になる。第2主成分(縦軸)は眉幅・鼻深と口唇の大きさを対比する成分で、この値が大きくなるほど(上にいくほど)中高の顔、小さくなるほど(下にいくほど)平坦な顔になることを示している。

また、各作者の位置によって主たる特徴を知ることができる。とくに興味深い点は、図5の樹状図でそれぞれのクラスターを形成していた作者が互いに近い位置を占めていること、および作者間の類似性の程度および相互的關係が二次元空間のなかで明瞭に認識できることである。

図8においても作者の時代順ならびに影響関係にしたがって、一定の流れがあらわされている。すなわち右端の師宣から出発して反時計回りに祐信・春信・清長の群に繋がり、そこから歌麿・豊国・北斎の群に移り、最後に国貞以下江戸末期まで活躍する浮世絵師群が繋がっている。その流れを日常語的分類語でいうならば、浮世絵における顔貌表現の時代的な流れは、まず丸顔からはじまり、それが江戸中期にかけてだんだん彫りが深くなり、やがて江戸後期にか

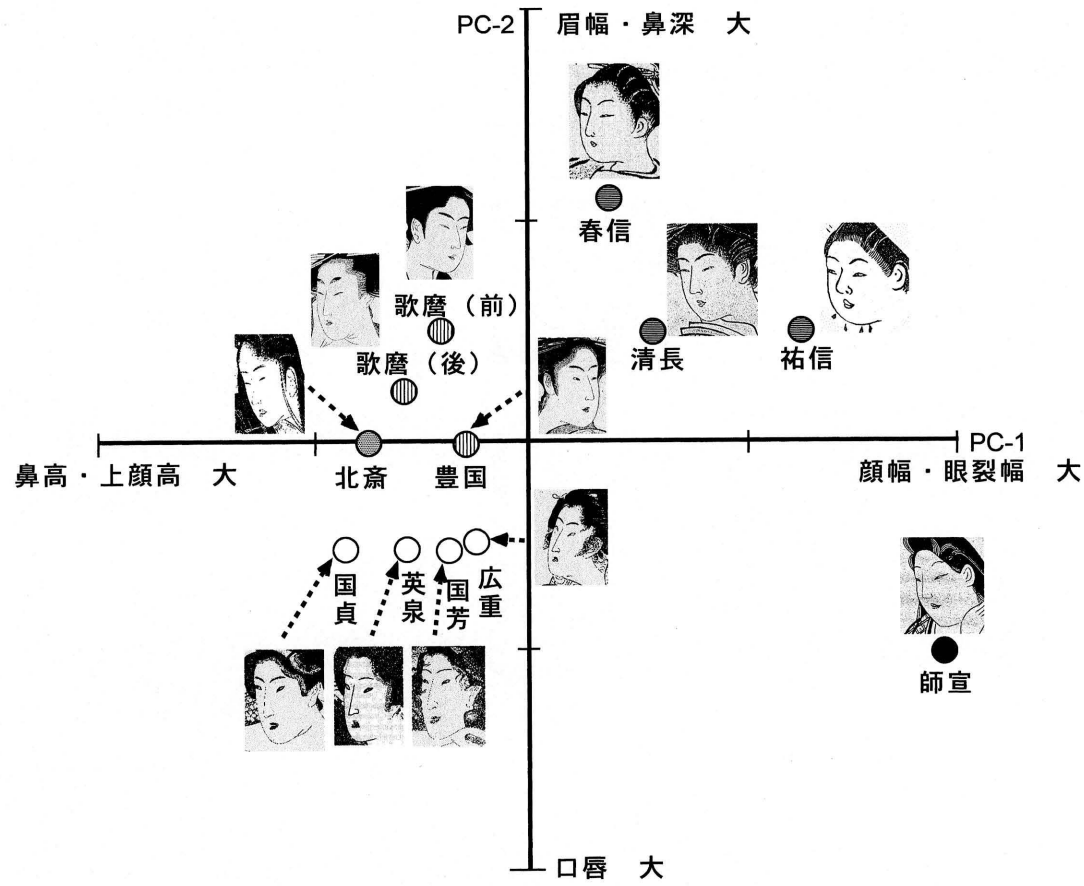


図8 第1、第2主成分値による二次元布置 (塩原原図)

表 8 主成分分析表

(a)固有ベクトル、固有値、寄与率 (第4主成分まで)

主成分	1	2	3	4
鼻 高	-0.42019	-0.07794	0.14667	0.73042
上顔高	-0.45616	0.07037	0.14606	0.28338
顔 幅	0.43869	0.26329	-0.08028	0.37641
口唇高	0.12100	-0.39166	0.71899	-0.08185
口唇幅	0.36872	-0.39901	0.09140	0.15136
眉 幅	-0.08458	0.67153	0.19270	-0.14532
眼裂幅	0.45763	0.09788	-0.17886	0.43674
鼻 深	0.23610	0.38275	0.59689	0.05501
固有値	4.05981	1.77734	1.18926	0.40018
寄与率	0.50748	0.22217	0.14866	0.05002
累積寄与率	0.50748	0.72964	0.87830	0.92832

(b)主成分値 (第4主成分まで)

主成分	1	2	3	4
師 宣	4.6250	-2.3436	-1.1230	0.0320
祐 信	2.8663	1.2521	2.1513	-0.2657
春 信	0.9866	2.3456	-1.7368	0.9024
清 長	1.2590	1.2463	1.0320	-0.0591
歌麿 (前)	-1.0425	1.1512	-0.8081	-0.1853
歌麿 (後)	-1.2946	0.4425	-0.7492	-0.3875
豊 国	-0.7252	-0.1436	-0.8405	-1.5020
北 斎	-1.5541	-0.1390	0.8218	-0.1399
広 重	-1.3939	-0.5380	0.1375	0.3729
国 貞	-1.5831	-1.1379	0.5369	0.4544
英 泉	-1.2179	-0.9982	0.4318	0.8386
国 芳	-0.9257	-1.1373	0.1463	-0.0608

けて面長となり、しかも一律に平坦になっていったということになる。丸顔から面長になるという結果は、浮世絵史の通説とも合致する。しかしそうした後追い確認だけではなく、そこに顔貌表現における彫りの深さと平坦さという観点を加えることによって、本分析は顔貌表現における差異識別にあらたで有効な観点を提供しているといえる。

試みに情報量をさらに増やし、第3主成分の値を含めて描いた三次元空間の布置図が図9である。この場合は累積寄与率が八七・八パーセントになるので、図8よりは一層情報量が大きくなる。あらたに加えられた垂直方向の軸 (PC3軸) は主として鼻深を代表し、上にいくにしたがって顔高に対する鼻深の相対値が大きくなる。

当然のことながら、各作者の二次元平面上の位置 (PC1軸およびPC2軸) は図8と変わらないが、あたらしい軸が加わったことによって作者間の関係が一層詳しく理解される。たとえば図8ではたがいに近い位置に布置されていた祐信、春信、清長のうち、春信は他の二作者とはやや異なることがわかる。また北斎の特徴もより明確になり、それは主として鼻深の違いによるとみてよいだろう。

・バイプロット法 (二元要素布置法) による分析

作者の分類と特徴の抽出を合わせておこなう分析法に、ガブリエルによって導かれたバイプロット法^⑩ (Gabriel's biplot method) がある。この方法はサンプル (作者) と変量 (計測値) をおなじ平面上に位置づけることにより、視覚的に理解しやすい図が得られるという特徴をもつ。

主成分分析とおなじデータ (表6) を用いて計算し、その結果を図示すると図10が得られる。この図のなかで矢印をも

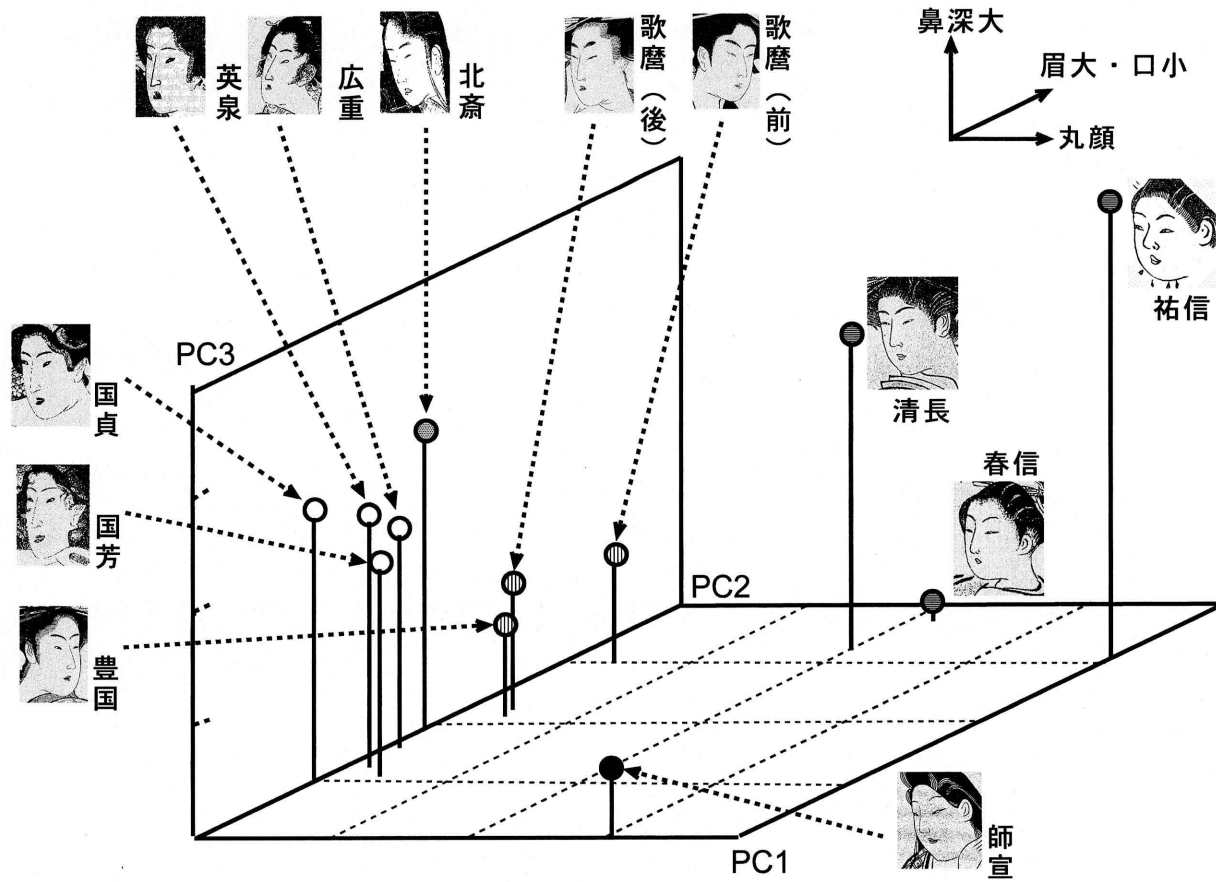


図9 第1-3主成分値による三次元布置 (埴原原図)

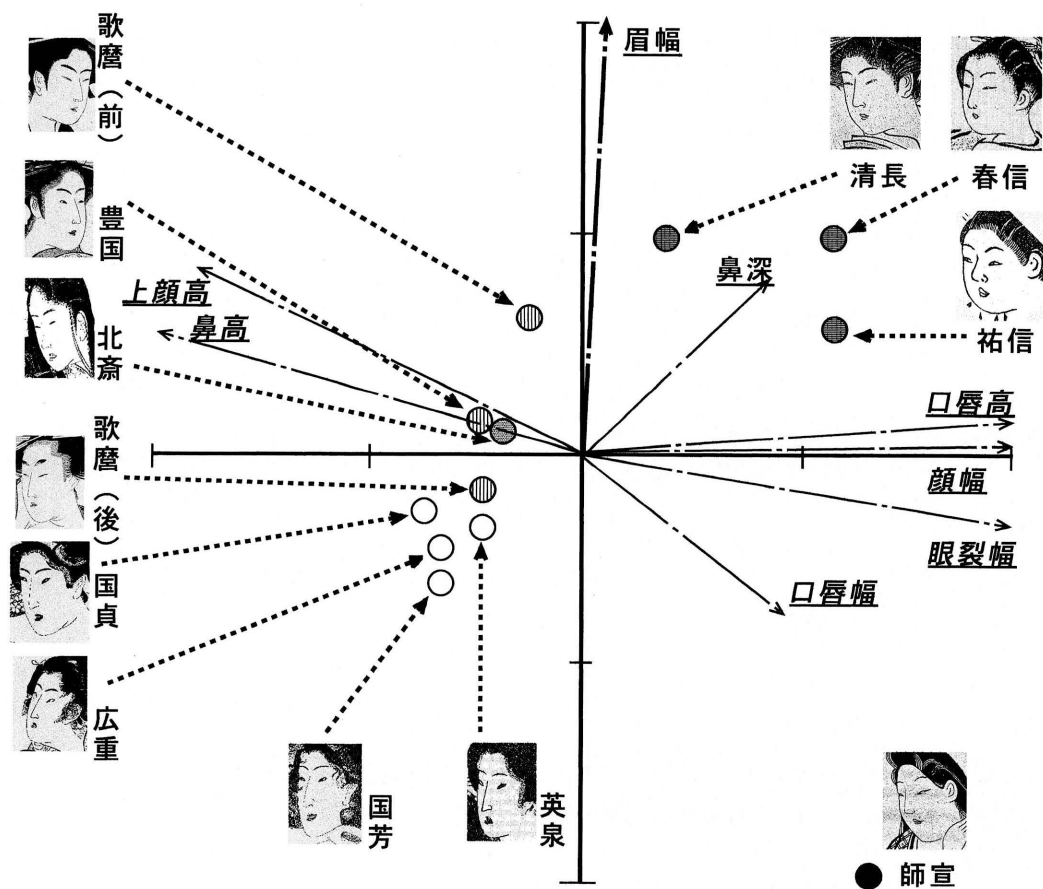


図10 バイプロット法による二元要素布置 (埴原原図)

	顔輪郭線						鼻					口		
	I	II	III	IV	V	VI	I	II	III	IV	V	I	II	III
師宣	4	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	0
祐信	0	8	0	0	0	0	0	8	0	0	0	7	1	0
春信	0	0	6	0	0	0	0	0	6	0	0	6	0	0
清長	0	2	0	5	0	0	0	0	0	7	0	0	7	0
歌麿 (前期)	0	0	0	8	0	0	0	0	0	8	0	0	7	1
歌麿 (後期)	0	0	3	0	0	2	0	0	0	5	0	0	5	0
北斎	0	0	0	0	3	1	0	0	0	4	0	0	2	2
豊国	0	0	0	4	0	0	0	0	0	4	0	1	3	0
国貞	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	7	0	0	7
英泉	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	6	0	0	6
国芳	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	6	0	0	6
広重	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	6	0	2	4

表 9 顔部品形状分類データ

つ直線は各変量のベクトル（方向と大きさ）をあらわすが、「大きさ」というのは全変量のなかでの相対的な寄与率に相当し、サンプルの分類に関してその変量がどの程度寄与しているか、ということをおあらわしている。

たとえば顔幅のベクトルはほぼ右・水平方向にのびているので、この図10の右側に位置する作者では顔幅が広く、逆に左側に偏る作者では顔幅が狭い。同様に眉幅のベクトルはほぼ真上を向いている

から、図の上方・下方に位置する作者は顔高に対する眉の幅が相対的に広い・狭いと対比される。

またベクトルの大きさをみると鼻深と口唇幅は比較的短いので、分類上の貢献度はやや低いと考えられ、主成分分析でこの計測値が第3主成分として抽出されたことと対応している。しかし他の五本のベクトルはいずれも大きく、浮世絵作者の分類には不可欠の要素とみてよさそうである。

数学的に、図10は第1および第2主成分で布置されたサンプルの図（図8）に変量のベクトルを重ね合わせたものとなっているが、図8にくらべて各サンプルと変量との関係をより明確に把握することができる。

ただし、この分析方法はベクトルの方向が何を意味するのかが統計学の基礎知識がないと理解しにくいなどの問題があり、このままでは美術史的分析における有効性は不明である。

・顔部品形状分類データの付加

一般に計測値は連続的に変化し（連続量）、大多数の場合は統計学という正規分布をする。これに対して分類データ（非連続量）は二項分布をするから、統計学的計算をおこなうにあたって両種のデータを混合することはできない。たとえば、身長データと血液型のデータを混合して日本人の平均値を計算することがナンセンスな

のと同義である。

しかしイエルノーは、近似的に両変量を含めて距離を計算する方法を提示した⁽¹⁾ (Hiernaux's combined distance method)。その計算法はかなり複雑ではあるものの、基礎となるデータを少しでも多角的に利用することができるという点で優れているので、ここでは顔部品形状分類法と顔部品計測値法の両方に基づく距離計算を試みた。計算に用いたデータは表6の計測値とおなじデータの顔部品形状分類(表9)である。

まず、比較のために顔部品形状分類データのみを使ってエドワーズ・キャヴァリスフォルズのE-二乗距離⁽²⁾ (Edwards & Cavallier-Sforza's E-square distance)を計算した。これは計測値におけるマハラノビスの汎距離に相当するもので、カテゴリ・データに基づく距離を計算する方法のひとつである(表10)。

図11は表10に示す距離行列から作図した樹状図で、基本的に計測値に基づく分類(図5)によく似ているものの、多少の違いがみられる。これは第一に、分類を容易にするために分け方を荒くせざるをえないという理由が考えられる。たとえば図7にみられるように、国貞と榮泉はきわめてよく似ているとはいえず、顔の輪郭や鼻の描き方に微妙な違いがある。しかし顔部品形状分類データではこの違いが無視され、両者はおなじカテゴリに分類されるのである。第二には、すでに述べた身長と血液型のように、顔部品計測値データと

形状分類データのあいだには、質的な違いがあるためであろう。しかしそれにしては、図2と図8の類似性はかなり高いと考えられる。

図5では師宣の特異さが強調されたのに対して、図11では師宣が京都の祐信よりもおなじ江戸の春信と近い距離に位置する点が興味深い。また図8では歌麿前期と後期がもっとも近かったが、図11では両者が分割され、歌麿前期が清長に近く、さらに豊国に近く、また歌麿後期が北斎に近いというのも、当時の浮世絵史の複雑な流れからみると興味深い。この分析結果を参考にして、具体的な表現の軌跡をたどってみることも面白い試みであろう。

おなじデータからイエルノーの距離を計算すると表11が得られ、これから樹状図を描いたのが図12である。

再び図5と図12を比較すると、清長は歌麿(前期)・豊国に近くなり、同時に歌麿の前期と後期がやや異なる位置に分類される。また北斎はむしろ歌麿・豊国のグループに近くなっている。このような点から、分析の結果はつぎのように解釈される。

1 清長は顔部品計測値においては祐信・春信のグループに入るが、顔の輪郭、鼻、口唇の描き方は歌麿(前期)や豊国に似ている。

2 歌麿は前・後期ともほとんど同様の計測値を示すが、顔の部分の描き方がやや異なっている。

3 北斎は顔部品計測値では広重・国芳らのグループに近いが、部分の表現は歌麿寄りの傾向を示す。

4 師宣、祐信、春信の三人はいずれの特徴においてもそれぞれ特異性を示し、他の作者とは異なる位置を占める。

5 一方、国芳、広重、国貞、英泉の四人は種々の点で互いによく似ており、この分析で取り上げた特徴に関する限り、顔部品計測値データでも形状分類データでもほとんど差がみられない。

これらのなかで1と3が、表現における影響関係を考えるうえで美術史的にはたいへん興味深い。図12と図5、11を比較しながらみると、顔部品計測値のみに基づいた図5は客観的な類似性の変化やグルーピングに有効なように思われ、顔部品形状分類データならびに両者を合わせた統計的分析法は、客観的なグルーピングに加えて、部分的な微妙な影響関係を暗示しているように思われる。

国貞	英泉	国芳
0.0		
0.0000	0.0	
0.0000	0.0000	0.0

豊国	歌麿・後	歌麿・前
0.0		
1043.13	0.0	
160.92	911.50	0.0

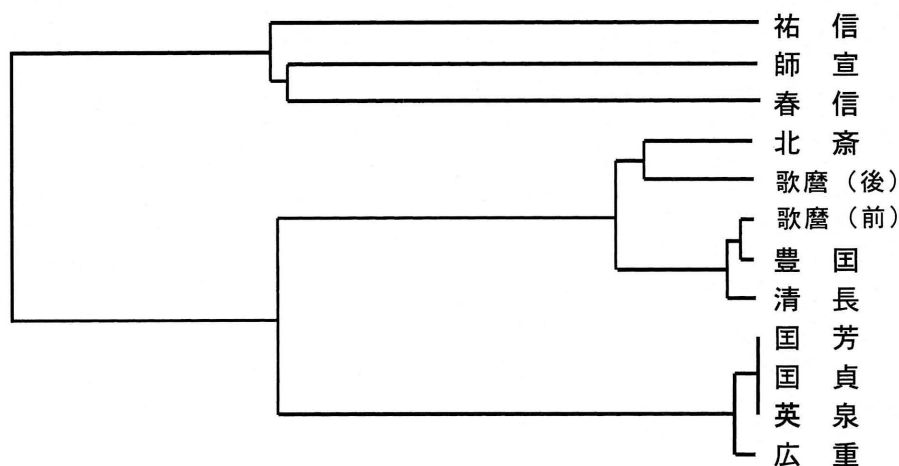


図11 カテゴリー・データ（顔輪郭、鼻、口の形状）からのE-二乗距離に基づく樹状図（植原原図）

表10 Edwards and Cavalli-SforzaのE-二乗距離行列

	師宣	祐信	春信	清長	歌麿・前	歌麿・後	豊国	北斎	広重
師宣	0.0								
祐信	0.7310	0.0							
春信	0.7139	0.7319	0.0						
清長	0.9699	0.6719	0.9699	0.0					
歌麿 (前)	0.9783	0.8739	0.9783	0.0682	0.0				
歌麿 (後)	0.9675	0.8461	0.7134	0.2954	0.3450	0.0			
豊国	0.8575	0.7763	0.8575	0.0785	0.0383	0.3556	0.0		
北斎	0.9326	0.8509	0.9326	0.3730	0.3518	0.2771	0.4144	0.0	
広重	0.9694	0.8978	0.9694	0.7855	0.7535	0.5757	0.8237	0.5162	0.0
国貞	1.0062	0.9783	1.0062	0.9699	0.8848	0.7601	0.9737	0.5873	0.0468
国芳	1.0062	0.9783	1.0062	0.9699	0.8848	0.7601	0.9737	0.5873	0.0468
国芳	1.0062	0.9783	1.0062	0.9699	0.8848	0.7601	0.9737	0.5873	0.0468

表11 Hiernauxの距離行列

	英泉	北斎	春信	広重	国貞	国芳	清長	師宣	祐信
英泉	0.0								
北斎	1243.13	0.0							
春信	2522.23	3698.11	0.0						
広重	96.48	1105.05	2574.88	0.0					
国貞	11.82	1235.52	2638.47	97.20	0.0				
国芳	44.25	1237.60	2541.85	112.83	29.19	0.0			
清長	1948.58	1136.94	3876.70	1604.60	2000.40	1929.96	0.0		
師宣	2893.17	4104.26	3250.25	3022.49	3019.94	2833.05	4211.02	0.0	
祐信	2347.99	3359.89	3041.85	2402.23	2436.63	2353.28	3094.12	3024.19	0.0
豊国	1967.84	1214.15	3898.56	1657.02	1951.18	1859.95	365.62	4232.85	3659.42
歌麿 (後)	1682.87	878.40	3121.99	1256.94	1676.20	1619.03	892.81	4473.91	3767.55
歌麿 (前)	2132.00	1323.41	4179.00	1718.19	2141.10	2075.78	296.21	4859.10	4124.00

本章では、なるべく簡単な計測方法を定義し、標準化することにあたってはもとに顔高に対する示数（百分率）のみを扱った。したがって分析法によっては視覚的印象とはやや異なる結果となることもあるが、これはさらに合理的な計測項目や標準化の方法を追加することによって改善されると思われる。たとえば鼻深、眉幅、眼裂幅、口唇幅などの横径は顔高（縦径）による標準化より、むしろ横径のひとつである顔幅によって標準化した方が視覚的直感に近い結果が得られるだろう。また今回は人類学的計測に近い項目を選んだが、それに加えて絵画的観点からあらたな計測を定義することも考えられる。

4 顔部品角度による分析

方法

つぎに顔部品形状分類を用いた第一の方法、顔部品計測値を用いた第二の方法に加え、顔の形状や顔部品の位置を示す計測点間の角度の情報をを用いる第三の方法について検討した。計測点は図13に示した顔の形状及び顔部品の三十七箇所の位置である。

計測点の測定法は、横基線、縦基線及びこれらの基線を平行移動して得られる副基線を用いる第3章の方法を基本とし



図13 37箇所の計測点及び縦基線、横基線
(村上原図)

ているが、横基線の設定法は前の方法と多少異なる。
基線の設定は以下の通りである。

横基線（X軸） 左右の眼裂上縁の最大高を結ぶ直線
縦基線（Y軸） 横基線と鼻稜線の交点、および口唇
の最大幅と最大高の中点を結ぶ直線

またこれらの基線を平行移動して得られる副基線を用いて、以下の三十七箇所の位置を測定した。

0 口唇の最大幅と最大高の中央点

- | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------|--------------|---------|-------------|----------|--------------|--------------|----------|----------|--------|-----------------------------|-------------|---------------|-------------|-------------|-----------|-----------|-------------|---|
| 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 頬輪郭と縦副基線との交点 | 頬輪郭と縦副基線との交点 | 頬輪郭の最高点 | 口唇上縁と下縁との交点 | 口唇下縁の最下点 | 口唇下縁向こう側の最遠点 | 口唇上縁向こう側の最遠点 | 鼻の鼻翼の最遠点 | 鼻の下縁の最下点 | 鼻尖の最遠点 | 向こう側の眼裂の最高点を通る縦副基線と眼裂下縁との交点 | 向こう側の眼裂の最遠点 | 向こう側の眼裂上縁の最高点 | 向こう側の眼裂の最近点 | 手前の眼裂上縁の最高点 | 手前の眼裂の最遠点 | 手前の眼裂の最近点 | 横基線と鼻稜線との交点 | |

- 交点
- 20 向こう側の口唇下縁の最遠点(13)を通る横副基線と頬輪郭の交点
- 21 下顎下縁と縦基線との交点
- 22 下顎下縁の最下点
- 23 下顎下縁と首との交点
- 24 横基線と手前の髪が生え際との交点
- 25 手前の耳前の髪が生え際の最小点
- 26 手前の耳の最下点
- 27 横基線上の耳の最遠点
- 28 手前の眉の最近点
- 29 手前の眉上縁の最高点
- 30 手前の眉の最遠点
- 31 手前の眉上縁の最高点を通る縦副基線と眉下縁との交点
- 32 向こう側の眉の最近点
- 33 向こう側の眉上縁の最高点
- 34 向こう側の眉の最遠点
- 35 向こう側の眉上縁の最高点を通る縦副基線と眉下縁との交点
- 36 縦基線と髪が生え際との交点

これらの三十七箇所の位置は、分析対象の十一人の作者の計七十二の顔のすべてにおいて、必ずしも計測できるわけではない。顔の横向きの角度や髪型によって、計測不可能なためいくつかの値が欠測値となっている顔がある。

つぎにこれらの計測点の位置座標を用いて、三点a b c間の角度を求めた^⑧。分析に用いる情報として、どの三点間の角度を用いたらよいかが大きな問題となるが、今回の分析では表12の三十種類の角度をまず求め、これらのなかのいくつかの角度を組み合わせて分析をおこなった。選択された十二種類の角度は、表12中に○で示した。

分析結果と考察

以下に十二種類の角度情報を用いた分析結果を示す。九人の作者(菱川師宣、西川祐信、鈴木春信、鳥居清長、喜多川歌麿、葛飾北斎、歌川豊国、溪斎英泉、歌川国芳)の描いた顔を、それぞれ四く十一枚選び出し、計五十三点の顔を分析した(表13)。前述の第一の方法及び第二の方法で分析に用いた十一人の作者のなかで、歌川広重、歌川国貞の二人の絵に関しては欠測値があり、十二種類の角度のなかで求まらないものがあったため、分析対象から除いた。また分析は主成分分析とクラスター分析の両方でおこなった。

分析に用いた十二種類の角度には、値の大きなものと小さなものが混在している。どの種類の角度の情報も分析において、おなじよ

表12 変数の説明

変数	角度	採用	変数	角度	採用
1	$\angle 32, 1, 8$	○	16	$\angle 1, 17, 21$	○
2	$\angle 32, 0, 28$		17	$\angle 1, 17, 0$	○
3	$\angle 32, 21, 28$		18	$\angle 1, 18, 21$	
4	$\angle 30, 1, 34$		19	$\angle 1, 18, 0$	
5	$\angle 30, 0, 34$		20	$\angle 1, 16, 0$	○
6	$\angle 30, 21, 34$	○	21	$\angle 1, 26, 21$	○
7			22	$\angle 0, 20, 22$	
8	$\angle 33, 1, 29$		23	$\angle 1, 25, 21$	○
9	$\angle 6, 1, 2$		24	$\angle 28, 26, 30$	
10	$\angle 6, 0, 2$		25	$\angle 28, 2, 30$	
11	$\angle 7, 0, 3$	○	26	$\angle 28, 4, 30$	
12	$\angle 1, 10, 12$	○	27	$\angle 1, 10, 11$	○
13	$\angle 10, 0, 12$	○	28	$\angle 13, 26, 14$	
14	$\angle 13, 16, 14$		29	$\angle 1, 6, 0$	
15	$\angle 1, 16, 2$		30	$\angle 1, 23, 0$	

表13 分析した顔数

作者	顔数
菱川師宣	5
西川祐信	6
鈴木春信	5
鳥居清長	6
喜多川歌麿	11
葛飾北斎	4
歌川豊国	5
溪斎英泉	6
歌川国芳	5

表14 9人の作者の顔(53枚)の主成分分析における固有値、累積寄与率

	固有値	寄与率	累積寄与率
第1主成分	5.2012	0.4334	0.4334
第2主成分	1.5409	0.1284	0.5618
第3主成分	1.4368	0.1197	0.6816
第4主成分	1.0772	0.0898	0.7713
第5主成分	0.7963	0.0664	0.8377

表15 9人の作者の顔(53枚)における主成分分析の固有ベクトル

	第1主成分	第2主成分	第3主成分	第4主成分	第5主成分
12:1, 10, 12	-0.24583	0.13382	-0.37525	0.41909	-0.38849
13:10, 0, 12	-0.03874	-0.35032	0.52196	0.07551	-0.68012
16:1, 17, 21	0.38013	0.08116	-0.08694	0.06195	-0.26203
17:1, 17, 0	0.37378	0.20825	-0.05459	0.07356	-0.06989
20:1, 16, 0	0.23700	-0.49504	0.06866	-0.02450	0.32953
21:1, 26, 21	0.34122	0.24851	0.17865	-0.37960	0.02947
23:1, 25, 21	0.37575	0.14474	-0.00172	-0.19051	-0.12840
27:1, 10, 11	0.18804	0.51162	0.33919	0.26571	-0.01751
10:6, 0, 2	-0.28603	0.28400	0.46185	-0.02845	0.04813
11:7, 0, 3	-0.30027	-0.03054	0.25236	-0.44188	-0.01979
2:32, 0, 28	-0.33620	0.33669	0.01472	0.03932	0.22627
8:33, 1, 29	0.14039	-0.15794	0.38382	0.60018	0.36443

うな影響力を及ぼすようにするため、ここでは相関行列を用いた主成分分析を試みた。

分析結果は表14のようになっており、第2主成分までの累積寄与率は約五六パーセントである。表15の固有ベクトルの値からすると、第1主成分は顔の長さに関係しており、この値が大きくなるほど面

長な顔と考えられる。第2主成分は明確に解釈するのは難しいが、眉や目の間の幅が狭く、かつ鼻が大きいと、第2主成分の値は小さくなり、逆の場合は大きくなるような合成変数である。

さて五十三点の顔に関し、第1主成分得点、第2主成分得点を求め、二次元上に配置したのが図14である。各作者の描く顔はそれぞ

れの作者ごとによくまとまっている。したがって、これら十二種類の角度情報で作者の特徴が相当程度把握できていることがわかる。

さらに、図14の左側には前期の作者の師宣、祐信、春信の三人、中央には中期の作者の清長、歌麿、北斎、豊国の四人、右側には後期の作者の

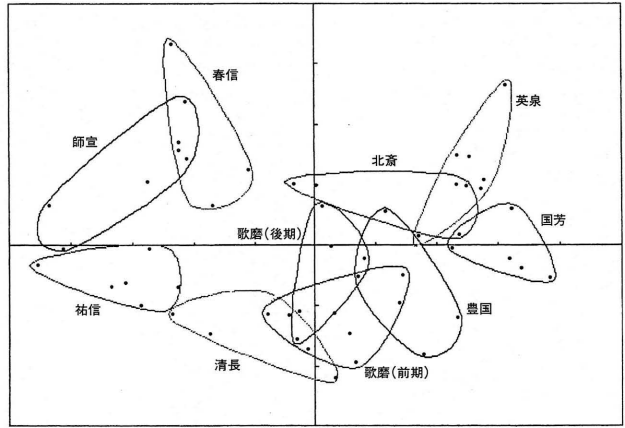


図14 9人の作者の顔(53枚)の主成分分析結果(角度情報、相関係数、第1、第2主成分 村上原図)

英泉、国芳の二人が位置しており、描かれた時期(前期、中期、後期)によって顔貌表現に特徴があり、第1主成分が顔の長さを示していることから、描かれた顔が丸顔から次第に面長な顔に変化している

ことが読み取れる。
顔部品の角度による分析結果を示す図14は、顔部品計測値による分析結果を示す図8と比較すると、その空間配置は春信の位置が相違するだけで、一八〇度回転するとはほとんど重なり合う。つまり師宣、祐信、春信の三人が他の作者の対極にあり、さらに清長が両者の中間に位置するという点では、ほぼ一致するのである。なお数学的には縦軸の左右、または横軸の上下を逆転しても結果の解釈に影響はないことを付け加えておく。

つぎに、おなじ十二種類の角度の情報を用いてクラスター分析をおこなってみた。図15は標準化ユークリッド距離を用いたクラスター分析結果の樹状図である。クラスターの結合法は、最長距離法を用いた。点線の位置で樹状図を切断してみると、四つのクラスターに分かれる。ここで、それぞれのクラスターに含まれる作者及び顔の数を調べてみると、つぎのようになっている。

- クラスターⅠ 師宣(2)、春信(3)
- クラスターⅡ 師宣(3)、祐信(6)、清長(1)
- クラスターⅢ 英泉(6)、国芳(5)
- クラスターⅣ 清長(5)、歌麿(11)、北斎(4)、豊国(5)、春信(2)

したがって、それぞれのクラスターはつぎのように解釈することができる。

- クラスターⅠ及びⅡは前期作者のクラスター
- クラスターⅢは後期作者のクラスター
- クラスターⅣは中期作者のクラスター

これら四つのクラスターにおいて間違って分類された顔、つまり

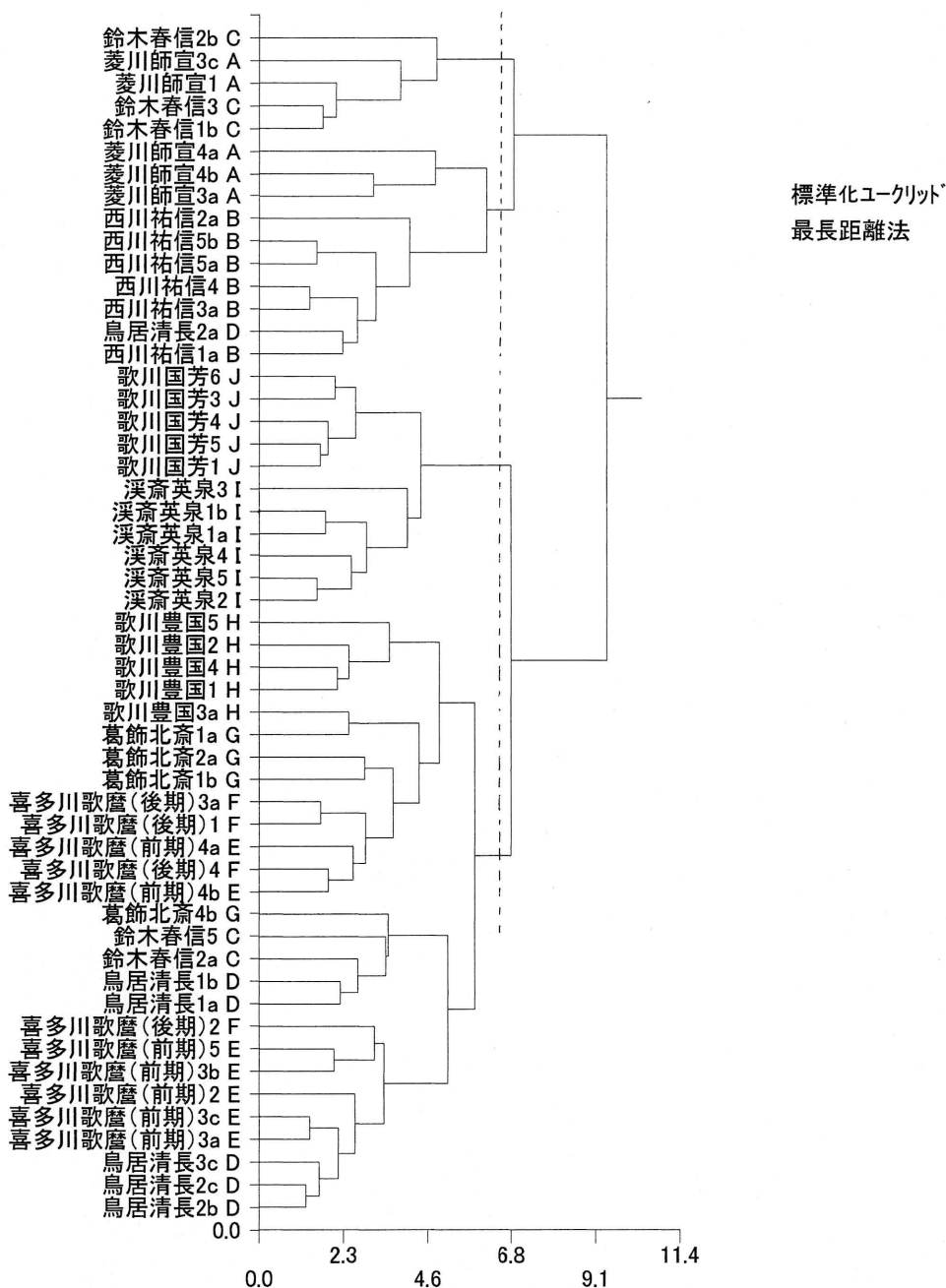


図15 クラスター分析結果 (標準化ユークリッド距離、最長距離法 村上原図)

本来属すべき活動期のクラスターに含まれなかった顔は、清長一点（クラスターIVに属すべきものがクラスターIIに）春信二点（クラスターIに属すべきものがクラスターIVに）の、五十三点中わずかに三点である。

また、図15の樹状図で詳細に各作者のクラスターの生成過程を検討してみると、国芳、英泉の二人の描く顔は、早い段階で完全なクラスターを結成しており、ほかの作者も比較的まとまってクラスターを結成していることがわかる。ただ、図15のクラスターIVのなかの、五点の顔から成る比較的小さなクラスターのなかに北斎、春信、清長の三人の作者の顔が混在している。ここが作者の顔の分析がもっともうまくいかなかったクラスターである。このクラスターに含まれる五点の顔を並べてみたのが図16である。この図の五点の顔を比較してみると、春信と北斎の顔はかなり異なるという印象を受けるが、分析に用いた十二種類の角度ではこの違いがうまく検出できていない。どのような角度の情報をどのように組み合わせる分析すると、このクラスターに含まれる五点の顔をそれぞれの作者のクラスターに含ませることができるのか、この点に関しては、これまでのところよい結果は得られていない。

五十三点の顔を主成分分析とクラスター分析の二通りの方法で分析した結果を比較してみると、図14、15ではほぼ似たような分類結果を得てはいるが、細かな点では多少分類が異なっている箇所がある。

図14の主成分分析の結果は十二種類の角度の情報の約五六パーセントを用いて描いた分析結果であるのに対し、図15は一〇〇パーセントの情報を用いた分析結果であることがひとつの原因である。用いている情報の量からみるとクラスター分析の方が多いが、クラスター分析では分析の際にどのような距離を用いるか、またどのようなクラスターの連結法を用いるかで分析結果が異なるという問題点がある。したがって、主成分分析とクラスター分析の分析結果を比較検討し、分類の良さを評価することが必要である。

顔の種々の計測点間の角度は顔の大きさとは関係がないという特徴をもつ。この点が分析に角度の情報を用いる利点ではあるが、角度情報を用いての作者ごとの顔の特徴の抽出は、さほど簡単ではない。

九人の作者の五十三点の顔を用いた今回の分析では、主成分分析、クラスター分析の結果からわかるように、特徴抽出の試み（作者別の絵の分類）は比較的成功している。しかし、作者や顔の数を増やしたときにおなじ角度の情報で作者別の分類がうまくいくかどうかは不明である。したがって作者や分析する顔の数を増やしながらか、どのような箇所を計測し、どのような角度情報をどのように組み合わせるのが有効かを調べることで、これから研究を進めるうえで必要となる。

また、三点から得られる三つの角度のうちのひとつの角度だけを



葛飾北斎 (4b)



鳥居清長 (1b)



鈴木春信 (5)



鈴木春信 (2a)



鳥居清長 (1a)

図16 一つのクラスターに含まれる3人の作者の5枚の絵
(村上原図)

分析対象として、いることにも問題が残っている。三角形のもうひとつの角度を組み込んだ分析をすれば、三点の成す三角形が確定して顔部品の配置関係が明確になり、顔部品計測値法とは違った角度からの顔部品の配置分析が可能になるだろう。

今回は画集から顔を拡大コピーしてパソコンに入力し、パソコン上で顔の形状や各部位の位置を計測した。しかし、小さな顔の場合は拡大コピーの段階ですでに画像が不鮮明なものも多い。そのため、

同一箇所の計測を複数回繰り返し測定誤差等の検討も試みたが、三点間の角度を求める際に、三点の計測値の誤差が角度の算出にどのような影響を与え、さらには数種類の角度を組み合わせで分析した際に、これらの計測誤差が分析結果にどの程度影響するかなど、検討しなければならぬ課題も多く残されている。

以上のように検討事項や問題点は多くあるが、今回の分析で角度情報を用いた分析が作者の絵の特徴抽出や、作者の同定に役立つ可能性は高いという確証は得られたといえる。

5 計量情報を用いた作者識別

つぎに、顔部品形状分類ならびに顔部品計測値の情報から、作者を決定する方法について検討する。

計量データから何らかの決定をくだす手続きとして、決定木を作成する方法がある。代表的な決定木作成方法に、キンランの方法⁴⁾がある。キンランの方法では、情報量概念を用いて決定木を作成し、誤り削減ルールというものにしたがって枝刈りをし、木を最適化する。

顔部品形状分類データのうち比較的安定した分類が可能と思われる顔輪郭線、鼻、口の三種類と、八種類の顔部品計測値から作成された作者決定木は、つぎのとおりである。

else 国貞

```
if 鼻 = I then 師宣
if 鼻 = II then 祐信
if 鼻 = III then 春信
if 鼻 = IV then
  if 顔輪郭線 = II then 清長
  if 顔輪郭線 = III then 歌麿後期
  if 顔輪郭線 = V then 北斎
  if 顔輪郭線 = VI then 歌麿後期
  if 顔輪郭線 = IV then
    if 鼻深 >= 17.4 then 豊国
    else if 口唇高 >= 11.1 then 歌麿前期
    else 清長
  if 鼻 = V then
    if 顔幅 >= 53.5 then
      if 眼裂幅 >= 17.1 then
        if 口唇幅 >= 16.9 then 国貞
        else 国芳
      else if 鼻高 >= 52.7 then 国芳
      else 広重
    else if 鼻深 >= 18.5 then 英泉
    else if 鼻高 >= 54 then 広重
```

決定木の構成をみると、鼻形状が作者識別に重要な役割を担っていることがわかる。鼻がI型ならば師宣、II型ならば祐信、III型ならば春信と自動的に決まってしまうことになる。鼻がIV型かV型であるならば他の情報を使って作者を識別することになる。この決定木で使われている情報は、顔部品形状分類データが顔輪郭線と鼻の二種類、顔部品計測値が鼻高、口唇高、顔幅、鼻深、口唇幅、眼裂幅の六種類である。

決定木の精度推定法として信頼性が高いleave-one-out法をおこなった結果、この決定木での作者の平均誤り率は二三・六パーセントであることがわかった。

作者識別結果を表16に示した。識別誤りのほとんどは、後期の四作者間で起きていることがわかる。後期の四作者のうち広重については、本手法によらずとも構図の面から他の三作者の作品と区別することが比較的容易であろう。しかし国貞・英泉・国芳については、作品の構図もよく似ており、識別困難といわざるをえない。

つづいて、作者ではなく浮世絵史上の前・中・後期の決定木を同様の方法で作成した。作成された決定木はつぎようになる。

```
if 鼻 = I ~ III then 前期
```

	師宣	祐信	春信	清長	歌麿(前期)	歌麿(後期)	北斎	豊国	国貞	英泉	国芳	広重
師宣	4											
祐信		8										
春信			6									
清長				7								
歌麿(前期)				1	6			1				
歌麿(後期)						5						
北斎						1	3					
豊国								5				
国貞									2	2	2	1
英泉									2	4		
国芳									2		2	2
広重									1	1	1	3

表16 作者識別結果 (leave-one-out法、縦が正解、横が識別結果)

if 鼻 = IV then 中期
if 鼻 = V then 後期

leave-one-out法によるこの決定木の推定誤り率は0パーセントであった。すなわち、この試験データに関しては鼻形状のみで前・中・後期を決定できることになる。

この結果は簡単ではあるが、鼻形状というひとつの変数のみによって判断するのは、いささか不安でもある。そこで、顔部品形状分類データを除いた八種類の顔部品計測値のみから前・中・後期を判定する決定木を作成してみた。結果はつぎのとおりである。

if 顔幅 \wedge = 65.2 then
if 鼻高 \wedge = 49.3 then 中期
else if 口唇高 \wedge = 11 then 中期
else 後期
else if 眼裂幅 \wedge 22.3 then 前期
else if 口唇高 \wedge = 11.9 then 中期
else 後期

ここで使用されている顔部品計測値は、鼻高、口唇高、顔幅、眼裂幅の四種類である。leave-one-out法によるこの決定木の推定誤

り率は、一一・一パーセントである。

本分析から顔部品（顔輪郭線、鼻、口）の形状分類データによっても、かなりの精度で時代識別と作者識別（後期の作者は別として）が可能であることが確認できる。考えてみればこれは当然のことであって、浮世絵師たちは顔の表現にあたって、顔部品の配置と同時に各部品の形にも独自の特徴を表そうとするからである。そうした意味で浮世絵の顔表現の統計学的分析には、数量測定法と形状分類法の両者を用いることが有効であろう。

ただしこれらの結果は、あくまでも与えられたサンプルの範囲内での結果に過ぎない。他の作品を対象に追加した場合、決定木の構成は変化する。より安定した判断基準を示すためには、入手しうる全作者の全作品についてデータを作成し、情報を研究者間で共有することが大切と考える。

6 おわりに

本論文で試みた浮世絵の顔表現の計量的分析が、時代表現の識別、作者表現の識別に有効であることが示された。それは単に美術史的経験判断を後追い証明するだけでなく、さまざまな変量を設定してその分析結果を空間表示することによって、美術史的な言語表現では明瞭化できなかった観点の発見につながる可能性をおおいに示している。



図17 倭画巧名尽

本論文で示した結果を総合的にみた場合、浮世絵の計量的分析が予想以上に役立つのではないかと一点で、共著者の意見が一致した。何よりも重要なことは、作者の特徴や作者間の相互関係について客観的な評価が出来ることであり、また今回の簡単な分析の結果からかなり合理的な分類が可能であることである。したがって、美術史家の経験に基づく評価と統計学的評価とを組み合わせることにより、従来より一層豊かな情報が得られると期待される。今後美術史のさまざまな分野で研究を進めようとする研究者は、その研究

のなかでかならず生じてくるであろう識別の問題において、理工学の研究者との共同研究を視野に入れておく必要があると考える。

とはいえ、作風を空間配置で表現するという手法は、美術研究者には違和感があるかもしれない。しかし同様の発想は、江戸時代からすでに存在している。戯作者・式亭三馬は、『稗史億説年代記』のなかの「倭画巧名尽」という図像(図17)で、当世の浮世絵師たちの勢力分布を二次元の空間配置で表現している。本論文の方法は、三馬の発想と基本的におなじである。そこに現代の計量手法とコンピュータの計算力が加わっただけであるともいえる。

本論文で活用した統計学は、いわば諸刃の剣であり、その使い方を誤ると重大な過誤に陥ることがある。それを避けるには、まずデータの採り方やその分布型の吟味にはじまり、種々の統計法のなかからもっとも適当なモデルを選ぶ必要がある。また本論文でもみられるように、おなじデータを使っても分析手法や主目的を異にするモデルが多数存在し、そこから導かれる結論は微妙に異なる部分がある。ややもすると、モデルや計算法の特徴から生じた差異を誇張し、それを自説の補強材料にするような誤った用法にも陥りがちである。モデルが違って変わらない結論を導くことが望まれる。

今後は美術分野の専門家の意見をさらに入れ、より精度の高い分析をおこないたいと考えている。

謝辞

この論文は、平成十一年度総合研究大学院大学共同研究「絵画の情報科学的分析に関する研究」の研究成果の一部である。研究をご支援くださった総合研究大学院大学、研究に対してご助言をいただいた国立民族学博物館・杉田繁治副館長、ならびにデータ作成にご助力いただいた岡屋純子さんに感謝申し上げる。

注

この論文は、共著者四名の共同執筆によるものである。顔部品形状分類法による分析、計量情報を用いた作者識別、および全体のとりまとめを山田が、美術史的な考察を早川が、顔部品角度による分析を村上が、顔部品計測値法による分析を埴原が、それぞれ主として担当した。

(1) 版画の場合は、絵師のほかに彫師、刷師の技量も最終的な作品に影響してくる。本論文では、彫りや刷りの影響を受けない特徴のみを使って分析している。

(2) 山田奨治『文化資料と画像処理』勉誠出版 二〇〇〇年

(3) サンプル間類似度(ここでは顔部品形状からみたふたつの顔の類似度)をもとに、それらの近さの相対的関係を空間に図示する方法。固有値あるいは寄与率は、その成分の重要度をあらわす。累積寄与率が第2変量までで0.93という場合、全体が持つ情報量の九三パーセントがふたつの変量で説明できていることを意味する。

する。

- (4) 第3章の統計計算は、すべて共著者のひとり・埴原が作成した統計プログラムによって処理された。

- (5) 矢状方向は、体の正面から真っ直ぐに矢を貫き通す方向のこと。
- (6) 計測値が正規分布（出現確率が平均値で最大となり、平均値から離れるにしたがって確率が漸減するような分布）すると仮定した場合、計測値が平均値 $\pm\sigma$ の外側である確率は三二パーセント、 $\pm2\sigma$ では四・五パーセント、 $\pm3\sigma$ では〇・三パーセントとなる。

- (7) Mahalanobis, P. C.: On the generalized distance in statistics, Proceedings of National Institute of Sciences, India, 2, pp.49-55, 1936. これは複数の変量（ここでは顔部品計測値）を組み合わせてサンプル（作者）間の距離係数を計算する方法で、他の計算法に比べて数学的にもっとも信頼性の高い距離が得られる。たとえば n 個の変量があるときは、互いに直交する（無相関の） n 次元空間の中に各サンプル（作者）を布置し、ピタゴラスの定理を用いて任意のサンプル・ペア間の距離を計算する。ここで「距離」というのは地理的距離と同様に考えることができる。つまり、距離が近いサンプルは互いに形態的類似度が高く、逆に遠いサンプルは類似度が低い。したがっておなじサンプル間の距離はゼロとなる。
- (8) サンプル（作者）間の距離から、近いものから順に線でつないで全体を樹状図で表現する手法。樹状図の作り方に群平均法、最長距離法などがあり、どの手法を選択するかによって出来上がる

樹状図の形態が微妙に異なることに注意を要する。

- (9) 複数の計測値の組み合わせから全体をあらわす主要な成分を抽出し、その成分の値（主成分値）によってサンプル（作者）を分類する方法。全体をあらわすのに貢献の大きな成分から順に、第1主成分、第2主成分……という。それぞれの主成分が何を意味しているかは、固有ベクトルの絶対値が大きい変量から推測できる。累積寄与率は、全体の情報の何パーセントが表現されているかをみるもので、第2主成分までで〇・七三という場合、ふたつの変数で全体の情報の七三パーセントがカバーされていることをあらわす。

- (10) Gabriel, K. R.: The biplot graphical display of matrices with application to principal component analysis. Biometrika, 58, pp. 458-467, 1971.

- (11) Hiernaux, J.: (1965), (上記に引用) — Constandse - Westermann: Coefficients of Biological Distance, Humanities Press, New York, 1972.)

- (12) Edwards, A. W. F. and Cavalli-Sforza, L.L.: Re-construction of evolutionary trees. Systematics Association Publication, No. 6, Phenetic and Phylogenetic Classification, pp.67-76, 1964.

- (13) 主成分分析のX座標とY座標をそれぞれ (X_a, Y_a) 、 (X_b, Y_b) 、 (X_c, Y_c) 、 \dots 、 $\angle abc = \theta$ 、 \dots

$$\theta = \cos^{-1} \frac{(a \cdot b)}{|a||b|}$$

など

$$(a \cdot b) = (Xa - Xb)(Xb - Xc) + (Ya - Yb)(Yb - Yc)$$

$$|ab| = \sqrt{(Xa - Xb)^2 + (Ya - Yb)^2}$$

$$|bc| = \sqrt{(Xb - Xc)^2 + (Yb - Yc)^2}$$

である。

(14) J・R・キンラン(古川康一監訳)『AIによるデータ解析』

トッパン 一九九五年